LÓGICA y MATEMÁTICA DISCRETA. Segundo parcial **21/11/2017**

Apellidos y Nombre:...

Indicaciones: **Tres primeras letras del primer apellido:** | | | |

- Tiempo total para el examen: 2h. No abandonar el examen durante los primeros 30 minutos.
- En las preguntas de test, para cada pregunta sólo una de las tres afirmaciones es cierta. Debe responderse a), b) o c) en el recuadro correspondiente o bien dejar el recuadro en blanco.
- Calificación de cada pregunta de test: acierto: +1; fallo: -1/2; blanco: 0.
- Cada definición se puntuará sobre 1 punto, cada ejercicio sobre 3 puntos y cada problema sobre 10 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras ni móviles.
- Las fechas de publicación de notas y de revisión están en Moodle y en el tablón.

Preguntas de test (20%)

El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(1 - 2x)^7$ es:

a) $-\binom{7}{3}$ b) $-8\binom{7}{4}$ c) $8\binom{7}{3}$

B

Con las letras de la palabra CARETO, el número de palabras que se pueden construir alternando vocales y consonantes es:

a) $2 \cdot 3! \cdot 3!$ b) $3! \cdot 3!$ c) $2 \cdot (3! + 3!)$

A

La función recursiva $f: \text{LIST}_\text{P}(\mathbb{Z}) \to \text{LIST}(\mathbb{Z})$ definida por

$$f(\text{L}) = \begin{cases} \text{L} & \text{si LONG(L)} = 0 \text{ ó } 1 \\ [\,0\,] & \text{si LONG(L)} \geq 2 \text{ y CAB(L)} = 0 \\ [\text{CAB (L)}] \,\|\, f(\text{RESTO (RESTO (L))}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene como conjunto de partida:

a) $\{[\ ]\}$
b) $\{[\ ]\} \cup \{[\,0\,]\} \cup \{[n] \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$
c) $\{[\ ]\} \cup \{[n] \,/\, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{[0] \,\|\, \text{L} \,/\, \text{L} \in \text{LIST}_\text{P}(\mathbb{Z})\}$

C

La selección de baloncesto tiene 15 integrantes y quiere elegir 5 jugadores para hacer una entrevista, de modo que esté al menos uno de los dos hermanos Gasol. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

a) V(15, 5) – V(13, 5) b) C(15, 5) – C(13, 5) c) 2 · C(14, 4)

B

La siguiente correspondencia recursiva $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es función:

a) $f(n) = \begin{cases} n^2 & n \in \{0, 1\} \\ f(n-1) + 2 & n \geq 2 \end{cases}$ b) $f(n) = \begin{cases} 2 & n \in \{0, 1\} \\ f(2n-1) & n \geq 2 \end{cases}$ c) $f(n) = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ f(2n-2) & n \geq 1 \end{cases}$

A

Sea P(n) una propiedad sobre el número natural n de la que se sabe que, P(5) y P(6) son ciertas y para todo $n \geq 6$, si P(n) y P(n + 1) son ciertas entonces también lo es P(n + 2). Entonces se verifica que:

a) P(n) es cierta para todo $n \geq 5$.
b) P(n) es cierta para todo $n \geq 6$.
c) Si P(7) es cierta entonces P(n) es cierta para todo $n \geq 5$.

C

Definiciones (10%)

1. Definir regla básica de una función recursiva.

   Una regla básica de una función recursiva $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ es una regla que define de modo explícito la imagen de uno o varios elementos del conjunto inicial A.

2. Enunciar el principio de inclusión – exclusión para los conjuntos A, B y C.

   $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Ejercicios (30%)

1. Probar por inducción que $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$, siendo:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a_{n-1} + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{n}{n+1}$$

Paso base: Para $n = 0$ se verifica que:

$$a_0 \underset{\text{RB}}{=} 0 \quad \text{y} \quad b_0 \underset{\text{def}}{=} \frac{0}{0+1} = 0. \quad \text{Luego, } a_0 = b_0.$$

Paso de inducción: Tomamos $n \geq 0$ y suponemos que $a_n = b_n$ (Hipótesis de Inducción)

Probemos que $a_{n+1} = b_{n+1}$:

Como $n \geq 0$, se tiene que $n + 1 \geq 1$ y entonces hay que aplicar la regla recursiva para a_{n+1}:

$$a_{n+1} \underset{\text{RR}}{=} a_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \underset{\text{Hip. Inducción}}{=} b_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \underset{\text{def}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} =$$

$$= \frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \underset{\text{def}}{=} b_{n+1}$$

Por tanto, $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Entonces, el principio de inducción garantiza que $a_n = b_n$ para todo $n \geq 0$.

2. Se consideran las funciones recursivas $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definidas por

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f(n/2) & \text{si } n \text{ es par} \quad R_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \quad R_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(n) = \begin{cases} 1 + g(n/3) & \text{si } n \text{ es múltiplo de 3} \quad R_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \quad R_2 \end{cases}$$

a) (*1.5 puntos*) Evaluar detalladamente f y g en 8, 9 y 12.

$f(8) \underset{R_1}{=} 1 + f(4) = 1 + 2 = 3$

$f(4) \underset{R_1}{=} 1 + f(2) = 1 + 1 = 2$

$f(2) \underset{R_1}{=} 1 + f(1) = 1 + 0 = 1$

$f(1) \underset{R_2}{=} 0$

$f(9) = 0$

$f(12) \underset{R_1}{=} 1 + f(6) = 1 + 1 = 2$

$f(6) \underset{R_1}{=} 1 + f(3) = 1 + 0 = 1$

$f(3) \underset{R_2}{=} 0$

$g(8) \underset{R_2}{=} 0$

$g(9) \underset{R_1}{=} 1 + g(3) = 1 + 1 = 2$

$g(3) \underset{R_1}{=} 1 + g(1) = 1 + 0 = 1$

$f(1) \underset{R_2}{=} 0$

$g(12) \underset{R_1}{=} 1 + g(4) = 1 + 0 = 1$

$g(4) \underset{R_2}{=} 0$

b) (*1.5 puntos*) Dar un valor $a \in \mathbb{N}^*$, tal que $f(a) = g(a) = 2$, y comprobar que la elección considerada es correcta. Si hay más de un valor para a, dar dos de ellos.

Verifica lo pedido cualquier número natural a tal que en su descomposición en números primos aparezcan el 2 y el 3 exactamente 2 veces cada uno, es decir, $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot k$, siendo k primo con 2 y 3 (k no divisible ni por 2 ni por 3).

Dos posibles ejemplos son $a = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ y $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Lo comprobamos para uno de ellos evaluando:

$f(36) \underset{R_1}{=} 1 + f(18) = 1 + 1 = 2$

$f(18) \underset{R_1}{=} 1 + f(9) = 1 + 0 = 1$

$f(9) \underset{R_2}{=} 0$

$g(36) \underset{R_1}{=} 1 + g(12) = 1 + 1 = 2$

$g(12) \underset{R_1}{=} 1 + g(4) = 1 + 0 = 1$

$g(4) \underset{R_2}{=} 0$

3. Sea $f : \text{LIST}(\mathbb{N}) \to \text{LIST}(\mathbb{N})$ la función recursiva definida por

$$f(\text{L}) = \begin{cases} [\ ] & \text{si } \text{LONG}(\text{L}) = 0 & \text{RB} \\ \big[[\text{CAB}(\text{L})]\big] \,\|\, f(\text{RESTO}(\text{L})) & \text{si } \text{LONG}(\text{L}) \geq 1 \text{ y LISTA}(\text{CAB}(\text{L})) = 0 & \text{RR}_1 \\ f(\text{CAB}(\text{L})) \,\|\, f(\text{RESTO}(\text{L})) & \text{si } \text{LONG}(\text{L}) \geq 1 \text{ y LISTA}(\text{CAB}(\text{L})) = 1 & \text{RR}_2 \end{cases}$$

Evaluar detalladamente $f([3, [1, [2]]])$ y hallar el árbol de dependencia, $\text{T}_f([3, [1, [2]]])$.

Se realiza la evaluación de $f([3, [1, [2]]])$ indicando en cada paso la regla que se utiliza.

$$f([3, [1, [2]]]) \underset{\text{RR}_1}{=} [[3]] \,\|\, f([[1, [2]]]) \qquad = [[3]] \,\|\, [[1], [2]] = [[3], [1], [2]]$$

$$f([[1, [2]]]) \underset{\text{RR}_2}{=} f([1, [2]]) \,\|\, f([\ ]) \qquad = [[1], [2]] \,\|\, [\ ] = [[1], [2]]$$

$$f([1, [2]]) \underset{\text{RR}_1}{=} [[1]] \,\|\, f([[2]]) \qquad = [[1]] \,\|\, [[2]] = [[1], [2]]$$

$$f([[2]]) \underset{\text{RR}_2}{=} f([2]) \,\|\, f([\ ]) \qquad = [[2]] \,\|\, [\ ] = [[2]]$$

$$f([2]) \underset{\text{RR}_1}{=} [[2]] \,\|\, f([\ ]) = [[2]] \,\|\, [\ ] = [[2]]$$

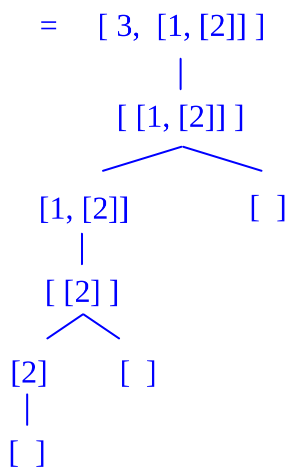
$$f([\ ]) \underset{\text{RB}}{=} [\ ]$$

$$f([\ ]) \underset{\text{RB}}{=} [\ ]$$

$$f([\ ]) \underset{\text{RB}}{=} [\ ]$$

El árbol de dependencia es:

$\text{T}_f([3, [1, [2]]])$ =



4. ¿Cuántas cadenas de 10 bits contienen exactamente dos unos sin que éstos sean consecutivos?

Lo resolvemos por el principio del complementario respecto del conjunto

$$U = \{\text{cadenas de 10 bits con 2 unos y 8 ceros}\}.$$

Entonces, $A = \{\text{cadenas de 10 bits con 2 unos separados}\}$

$$\overline{A} = \{\text{cadenas de 10 bits con 2 unos que van juntos}\}$$

Los elementos de U son las permutaciones de 10 elementos donde hay 2 unos que no se distinguen entre sí y 8 ceros idénticos, por tanto, su número es:

$$|U| = PR(10, 8, 2) = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 5\cdot 9 = 45$$

y $|A| = |U| - |\overline{A}|$

Para calcular cuántos son los elementos de $\overline{A}$ basta con calcular en cuantas posiciones distintas podemos colocar los 2 unos que van juntos, pues el resto de las posiciones se rellenaran con ceros.

Como el primer 1 solo se puede colocar en 9 posiciones pues el segundo uno le seguirá, se tiene que: $|\overline{A}| = 9$.

Entonces, $|A| = |U| - |\overline{A}| = 45 - 9 = 36$.

Problema 1 (20%):

a) (*4 puntos*) Definir recursivamente una función $f : \mathrm{LIST_P}(\mathbb{N}) \to \mathrm{LIST}(\mathbb{N})$ tal que dada una lista plana L construya la lista que se obtiene al multiplicar por 3 cada uno de sus elementos que son impares, colocándolos en orden inverso al que aparecen en L, hasta llegar al primer 0 si la lista contiene alguno. Por ejemplo, $f([2, 5, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9]) = [21, 3, 15]$.

Podemos dar la siguiente definición recursiva de f:

$$f(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\,] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 0 \quad \mathrm{RB_1} \\ [\,] & \text{si } \mathrm{CAB(L)} = 0 \quad \mathrm{RB_2} \\ f(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{si } \mathrm{CAB(L)} \text{ es par y } \mathrm{CAB(L)} \neq 0 \quad \mathrm{RR_1} \\ f(\mathrm{RESTO(L)}) \,\|\, [3 \cdot \mathrm{CAB(L)}] & \text{si } \mathrm{CAB(L)} \text{ es impar} \quad \mathrm{RR_2} \end{cases}$$

En la recursividad se va construyendo la lista f(L) mediante la estrategia siguiente:

1. En cada paso recursivo, es necesario controlar si CAB(L) es impar o par no nulo:
   a. Si CAB(L) es un par no nulo se desecha y se sigue evaluando la función sobre el resto de la lista.
   b. Si CAB(L) es impar, ésta se multiplica por 3 y se mete en una lista que se concatena por la derecha para que al final los elementos queden en orden inverso.
2. Mediante este proceso se llega:
   a. Hasta la lista vacía, si la lista de partida no contiene el 0, y se devuelve la lista [ ] ($\mathrm{RB_1}$).
   b. Hasta la posición del 0, cuando la lista lo contiene, y también se devuelve la lista [ ] ($\mathrm{RB_2}$).

Finalmente, se devuelve la lista con todos los impares multiplicados por 3 pero colocados en orden inverso a su aparición en L, si la lista no contiene el 0. Y si la lista contiene el 0, sólo hace lo mismo para los impares anteriores al 0.

b) (*1.5 puntos*) Evaluar detalladamente $f([5, 4, 7, 0, 9, 2])$.

$$f([5,4,7,0,9,2]) \underset{\mathrm{RR_2}}{=} f([4,7,0,9,2]) \,\|\, [3\cdot 5] = [21] \,\|\, [15] = [21, 15]$$

$$f([4,7,0,9,2]) \underset{\mathrm{RR_1}}{=} f([7,0,9,2]) \underset{\mathrm{RR_2}}{=} f([0,9,2]) \,\|\, [3\cdot 7] = [\,] \,\|\, [3\cdot 7] = [21]$$

$$f([0,9,2]) \underset{\mathrm{RB_2}}{=} [\,]$$

c) (*1.5 puntos*) Hallar el conjunto de partida de *f*.

$$\mathrm{CP}_f = \{[\,]\} \cup \{\mathrm{L} \in \mathrm{LIST_P}(\mathbb{N}) \;/\; \mathrm{CAB(L)} = 0\}$$

d) (*3 puntos*) Extender f a listas no planas, es decir, definir recursivamente g : LIST ($\mathbb{N}$) $\rightarrow$ LIST ($\mathbb{N}$) de modo que, por ejemplo, g ([[5, 2, 0, 9], 1, 4, 0, 7]) = [3, [15]].

Podemos dar la siguiente definición recursiva de g:

$$g(\mathrm{L}) = \begin{cases} [\,] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} = 0 & \mathrm{RB}_1 \\ [\,] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} > 0, \mathrm{LISTA(CAB(L))} = 0 \text{ y } \mathrm{CAB(L)} = 0 & \mathrm{RB}_2 \\ g(\mathrm{RESTO(L)}) & \text{si } \mathrm{LONG(L)} > 0, \mathrm{LISTA(CAB(L))} = 0 \text{ y } \mathrm{CAB(L)} \text{ es par y} \neq 0 & \mathrm{RR}_1 \\ g(\mathrm{RESTO(L)}) \,\|\, [3 \cdot \mathrm{CAB(L)}] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} > 0, \mathrm{LISTA(CAB(L))} = 0 \text{ y } \mathrm{CAB(L)} \text{ es impar} & \mathrm{RR}_2 \\ g(\mathrm{RESTO(L)}) \,\|\, [g(\mathrm{CAB(L)})] & \text{si } \mathrm{LONG(L)} > 0 \text{ y } \mathrm{LISTA(CAB(L))} = 1 & \mathrm{RR}_3 \end{cases}$$

Las reglas definidas en f para listas planas (apartado a)) son válidas para g cuando CAB(L) es un número, es decir, cuando LISTA(CAB(L)) = 0.

Además se ha añadido la regla recursiva RR_3 para listas en cuya cabeza haya una lista, es decir, cuando LISTA(CAB(L)) = 1. En este caso, hay que aplicar la función g sobre las listas CAB(L) y RESTO(L) y concatenar los resultados de modo que queden en orden inverso al que aparecen en L, es decir, g(RESTO(L)) a la izquierda de g(CAB(L)), siendo necesario añadir los corchetes g(CAB(L)) para no perder la estructura en niveles de la lista inicial L.

Problema 2 (20%): JUSTIFICAR TODAS LAS REPUESTAS.

1. (*3 puntos*) Una empresa tiene 5 grandes tiendas y va a repartir entre ellas 12 cestas de Navidad iguales. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

   Hay que hacer selecciones de las 5 tiendas, $T_1, \ldots, T_5$, tomadas de 12 en 12 pues hay que asignar las 12 cestas. Es obvio que es imprescindible la repetición de elementos.

   Por ejemplo,

   $T_1 \ldots\ldots\ldots T_1$ significará que las 12 cestas se asignan a la tienda T_1.
   $T_1 \ldots\ldots T_1\, T_2$ significará que 11 cestas se asignan a la tienda T_1 y otra a T_2.

   Y como las cestas son iguales, el orden de los elementos en la selección no influye. Entonces, se trata de las combinaciones con repetición de las 5 tiendas tomadas de 12 en 12 y, por tanto, hay

   $$CR(5, 12) = PR(4 + 12, 12, 4) = \frac{16!}{4!\cdot 12!}$$

2. La empresa también va a distribuir 12 ayudantes para la campaña de Navidad entre sus 5 tiendas.

a) (*3 puntos*) ¿De cuántas maneras puede hacerlo si es posible asignar cualquier número de ayudantes a la misma tienda?

Ahora también hay que hacer selecciones de las 5 tiendas tomadas de 12 en 12 pues hay que asignar los 12 ayudantes, pero como éstos son distintos, el orden en que se asignen a las tiendas sí que hace que la selección sea distinta.

Entonces, se trata de las variaciones con repetición de las 5 tiendas tomadas de 12 en 12.
Por tanto, hay $VR(5, 12) = 5^{12}$.

b) (*4 puntos*) Entre los 12 ayudantes hay dos parejas de hermanos, la primera formada por Juan y Pedro y la segunda por Ana y María. ¿En cuántas de estas distribuciones hay al menos una pareja de hermanos asignados a la misma tienda?

Utilizamos ahora el principio de inclusión-exclusión:

A = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que Juan y Pedro (pareja P_1) van a una misma tienda}
B = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que Ana y María (pareja P_2) van a una misma tienda}
$A \cap B$ = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que P_1 va a una tienda y P_2 también va a una tienda}
Nos piden $A \cup B$ = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que P_1 va a una tienda o bien P_2 va a una tienda}.

Y se verifica que: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Calculamos el cardinal de A por el principio de multiplicación:

Paso 1: Elegimos la tienda a la que va P_1. Hay 5 posibilidades pues puede ser cualquiera de las 5 tiendas.

Paso 2: Colocamos los 10 ayudantes restantes en las tiendas ya sin ninguna restricción (análogo a lo realizado en a)): $VR(5, 10) = 5^{10}$.

Los resultados obtenidos por este proceso son distintos pues o bien la tienda elegida para P_1 es distinta o bien la asignación de los 10 restantes en las 5 tiendas varía.

Por tanto, por el principio de multiplicación hay: $|A| = 5 \cdot VR(5, 10) = 5 \cdot 5^{10} = 5^{11}$

Análogamente, $|B| = |A| = 5^{11}$.

Finalmente, calculamos el cardinal de $A \cap B$:

Paso 1: Elegimos las dos tiendas a las que van P_1 y P_2. Estas dos tiendas pueden ser distintas o coincidir, y el orden influye pues las parejas son distintas.
Por lo tanto se trata de $VR(5, 2) = 5^2$.

Paso 2: Colocamos los 8 ayudantes restantes en las tiendas ya sin ninguna restricción, por lo que se trata de las variaciones con repetición de 5 tomados de 8 en 8 (análogo a lo realizado antes):

$$VR(5, 8) = 5^8.$$

Los resultados obtenidos por este proceso son distintos pues o bien la elección para las tiendas a las que se asignan P_1 y P_2 son distintas o bien la asignación de los 8 ayudantes restantes en las 5 tiendas varía.

Por tanto, por el principio de multiplicación hay: $|A \cap B| = VR(5, 2) \cdot VR(5, 8) = 5^2 \cdot 5^8 = 5^{10}$

Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2 \cdot 5^{11} - 5^{10} = 10 \cdot 5^{10} - 5^{10} = 9 \cdot 5^{10}$

Otra solución por el complementario de:

b) (*4 puntos*) Entre los 12 ayudantes hay dos parejas de hermanos, la primera formada por Juan y Pedro y la segunda por Ana y María. ¿En cuántas de estas distribuciones hay al menos una pareja de hermanos asignados a la misma tienda?

Se pide el cardinal de

X = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que P_1 va a una tienda o bien P_2 va a una tienda}.

Y tomamos el complementario, $\overline{X}$, en el conjunto:

U = { distribuciones de los 12 ayudantes sin restricciones} con $|U| = 5^{12}$ calculado en a).

$\overline{X}$ = {distribuciones de los 12 ayudantes en las que los de la pareja P_1 van a tiendas distintas y los de P_2 también van a tiendas distintas}.

Para calcular el cardinal de $\overline{X}$ procedemos como sigue:

Paso 1: Elegimos las dos tiendas distintas a las que van los de P_1:
Se trata de variaciones puesto que hay que elegir tienda para Juan y para Pedro y pueden intercambiarse: $V(5, 2) = 5 \cdot 4$.

Paso 2: Elegimos las dos tiendas distintas a las que van los de P_2. Análogamente, $V(5, 2) = 5 \cdot 4$. Pueden coincidir o no con las tiendas elegidas para Juan y Pedro.

Paso 3: Elegimos el reparto de los otros 8 ayudantes: $VR(5, 8) = 5^8$.
También pueden ir a cualquier tienda.

Todos los resultados son distintos pues
Los resultados obtenidos por este proceso son distintos pues o bien la elección de tiendas para Juan y Pedro es distinta, o es distinta la elección para Ana y María o la del resto.

Entonces, $|\overline{X}| = V(5, 2) \cdot V(5, 2) \cdot 5^8 = 16 \cdot 5^{10}$.

Y $|X| = |U| - |\overline{X}| = 5^{12} - 16 \cdot 5^{10} = (25 - 16) \cdot 5^{10} = 9 \cdot 5^{10}$.